

國立虎尾科技大學九十八學年度研究所（碩士班）考試入學試題

所別：資訊工程系碩士班

科目：考試科目2【線性代數(50%)、離散數學(50%)】

注意事項：

- (1)：本試題共有八題，其中一到四題為線性代數題，五到八題為離散數學題。
(2)：每題配分如問題前所示，並請依序作答在答案卷上並註明題號。

1. (10%)請算出下列矩陣 A 之行列式值 $\text{determine}(A)$ (需寫出計算過程)?

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 7 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 8 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 9 & 5 & 2 & 1 & 4 \\ 5 & 8 & 4 & 0 & 2 & 5 \\ 6 & 7 & 3 & 0 & 3 & 6 \end{bmatrix}$$

2. (5%)若某一線性轉換 T 滿足下列條件：

$$T \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 11 \end{bmatrix}, \quad T \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 9 \end{bmatrix}, \quad \text{及} \quad T \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -13 \\ 17 \end{bmatrix}$$

請寫出此線性轉換之矩陣表示 T ?

3. (10%)線性轉換 $T: R^3 \rightarrow R^2$ 之表示式如下

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad \text{請找出此轉換之核心 Kernel}(T)?$$

4. $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$, 請完成下列

(15%) (a) 計算 A^7 的特徵值(eigenvalues)及特徵向量(eigenvectors) ?

(10%) (b) 假若 A 可逆, 求其逆矩陣?

5. (10%)請利用數學歸納法證明, 當 n 是正整數時, $n^3 - n$ 可以被 3 整除?

6. (10%)自 $\{1, 2, 3, \dots, 9\}$ 中任取 6 個數, 試證至少有兩個數之和為 10?

7. (5%) (a) 請判斷 $A \vee (B \wedge C) \rightarrow (A \vee B) \wedge C$ 為永真式(tautology)、永假式(contradiction)或條件式(conditional) (注意: 須有運算過程, 否則不予計分)?

(5%) (b) 請證明 $p \rightarrow q$ 和 $\neg p \vee q$ 是邏輯上的等價 (logically equivalent)?

(5%) (c) 寫出 $\exists w \forall a \exists f (P(w, f) \wedge Q(f, a))$ 的否定 (negation)?

8. (15%) 計算遞迴關係式 (recurrence relation) $a_n = 4a_{n-1} - 3a_{n-2} + 2^n + n + 3$ 的解, 其中

$$a_0 = 1 \quad \text{and} \quad a_1 = 4?$$