

國立虎尾科技大學九十七學年度研究所(碩士班)考試入學試題

所別：光電與材料科技研究所(丁組)

科目：考試科目2(線性代數50%、離散數學50%)

注意事項：

- (1) 本試題共有八題，其中一到四題為線性代數題，五到八題為離散數學題，每題配分如問題後所示。
- (2) 請依序作答在答案卷上並註明題號。

1. (a) 試將向量 $(4, 5, 5)$ 表示成 $(1, 2, 3)$, $(-1, 1, 4)$ 與 $(3, 3, 2)$ 等向量的線性組合? (10 分)

(b) A 與 B 都是 3×3 矩陣, $|A|=2$, $|B|=-3$, 求 $|4A^2B|=?$ (5 分)

2. 找出 A 矩陣的一組列空間的基底, 並求該矩陣的秩? (10 分)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 4 \\ 1 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

3. 考慮下列矩陣

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -2 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$$

(a) 求乘積 AA^T ? (4 分)

(b) 證明 AA^T 為對稱矩陣? (6 分)

4. (a) 已知 C 為一可逆矩陣, 請證明 若 $AC=BC$, 則 $A=B$? (6 分)

(b) 請證明 若 A 為一可逆矩陣, 則此線性方程式系統 $Ax=b$ 有唯一解? (9 分)

5. 令 $P(A)$ 表示集合 A 之冪集合(power set)，請判斷下列各式的真偽：
- (a) $A = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ ，則 $\{\{\emptyset\}\} \subseteq A$ (2 分)
- (b) $A = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ ，則 $\{\{\emptyset\}\} \subseteq P(A)$ (3 分)
- (c) $A = \{a, \{a\}\}$ ，則 $\{\{\{a\}\}\} \in P(A)$ (2 分)
- (d) $A = \{a, \{a\}\}$ ，則 $\{a\} \subseteq P(A)$ (3 分)
6. 某人爬樓梯時，不是一步上一階就是一步上二階。(a) 如果他家的樓梯有 5 階，請問他有多少種不同的上樓方式?(7 分) (b) 請寫一個遞迴關係式來表示樓梯有 n 階時，他上樓方式的方法數?(8 分)
7. 設 $A = \{a, b, c\}$ ，請判定下列四個作用 A 上的二元關係(binary relation)，何者為等價關係？何者為相容關係？(10 分)
- $R_1 = \{(a, a), (a, b), (b, b), (b, c)\}$
- $R_2 = \{(a, a), (a, b), (b, b), (b, a), (c, c)\}$
- $R_3 = \{(a, a), (a, c), (a, b), (b, c), (b, b), (b, a), (c, c)\}$
- $R_4 = \{(a, b), (b, c), (a, c)\}$
8. 下表所示為一有限狀態機 M 之狀態表，請回答下列問題：(15 分)
- (a) 試繪出其狀態圖？
- (b) 何者為暫時狀態(transient state)？
- (c) 令 s_0 為啟始狀態，則可將那些狀態刪除？

s	$M(s, i)$	
	$i=0$	$i=1$
s_0	s_1	s_2
s_1	s_0	s_1
s_2	s_2	s_1
s_3	s_2	s_4
s_4	s_3	s_4
s_5	s_4	s_3